8/10/2018

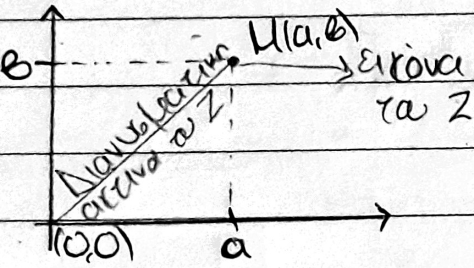
Μιγαδικοί αριθμοί:

$z=\alpha+\beta i$, $i^2=-1$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Το α ονομάζεται πραγματικό μέρος του z και συμβολίζεται με Re(z). Το β ονομάζεται φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται με Im(z). Δηλαδή,

$\alpha = Re(z)$, $\beta = Im(z)$

Γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών



$M(z) = M(\alpha,\beta)$

Μιγαδικό επίπεδο
→ Στον άξονα των x βλέπω την μορφή $\alpha+0i$, ονομάζεται άξονας των πραγματικών αριθμών
→ Στον άξονα των y βλέπω την μορφή $0+\beta i$, ονομάζεται άξονας των φανταστικών αριθμών.

→ Το διάνυσμα OM ονομάζεται διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού z

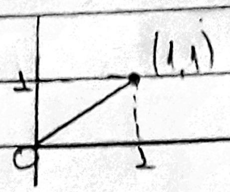
→ Το μήκος του OM ονομάζεται μέτρο του z και συμβολίζεται με

$|z| = |OM| = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$

μέτρο μήκος

Ασκήσεις Φυλλάδιο #1

Άσκηση 1: $\overline{|1\eta|}$ • $1+i = 1+1i$



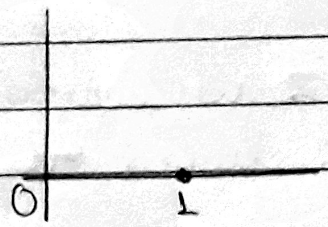
$Re(1+i) = 1$

$Im(1+i) = 1$

$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\bar{z} = 1-i$

• $1 = 1+0i$



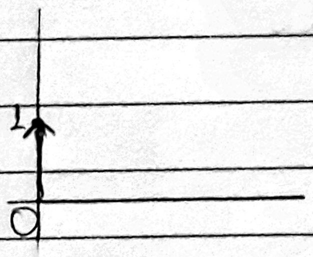
$Re(1) = 1$

$Im(1) = 0$

$|1| = |1+0i| = |1| = 1$

$\bar{z} = 1$

• $i = 0+1i$



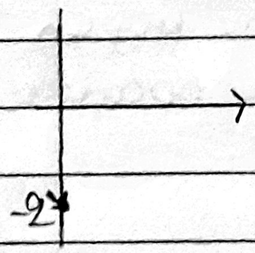
$Re(i) = 0$

$Im(i) = 1$

$|i| = |0+1i| = \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1$

$\bar{z} = -i$

• $-2i$



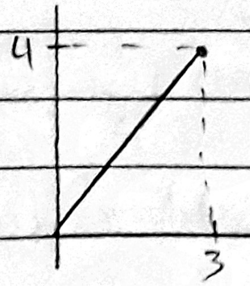
$Re(-2i) = 0$

$Im(-2i) = -2$

$\bar{z} = +2i$

$|-2i| = |0-2i| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

• $3+4i$



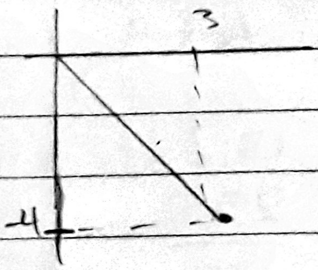
$Re(3+4i) = 3$

$Im(3+4i) = 4$

$|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\bar{z} = 3-4i$

• $3-4i$



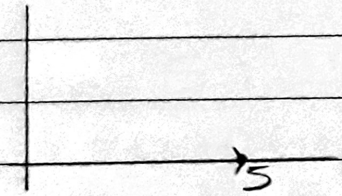
$Re(3-4i)=3$

$Im(3-4i)=4$

$|3-4i|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$\bar{z}=3+4i$

• $5=5+0i$



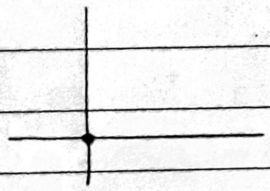
$Re(5+0i)=5$

$Im(5+0i)=0$

$\bar{z}=5$

$|5|=5$

• $0=0+0i$



$Re(0+0i)=0$

$Im(0+0i)=0$

$\bar{z}=0$

$|0|=0$

<u>Άσκηση 2:</u>

• $z=-5+7i$, $\bar{z}=-5-7i$
• $z=-4+9i$, $\bar{z}=-4-9i$
• $z=4i$, $\bar{z}=-4i$
• $z=11$, $\bar{z}=11$
• $z=-i$, $\bar{z}=+i$

<u>Άσκηση 3:</u>

• $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
• $|-5i|=\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$
• $|0|=0$
• $|-4|=\sqrt{(-4)^2+(0)^2}=\sqrt{16}=4$
• $(1-i)^2(1+i)^4=$

$=(1+i^2-2i)(1+i^2+2i)^2=$

$=(1-1-2i)(1-1+2i)^2=$

$=(-2i)(4i^2)=(-2i)(-4)=8i$. Άρα $|8i|=\sqrt{8^2}=$

$=|8|=8$

- $\frac{3+i}{4-3i} = \frac{(3+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{12+9i+4i+3i^2}{16-9i^2} = \frac{12+13i-3}{16+9} =$

$= \frac{9+13i}{25}$ Άρα $a = \frac{9}{25}$, $b = \frac{13}{25}$

$\left|\frac{9}{25} + \frac{13}{25}i\right| = \sqrt{\left(\frac{9}{25}\right)^2 + \left(\frac{13}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{625} + \frac{169}{625}} = \sqrt{\frac{250}{625}} = \frac{5\sqrt{10}}{25}$

$= \frac{\sqrt{10}}{5}$

Άσκηση 4:

- $(-4+6i)+(7-2i) = (-4+7)+(6-2)i = 3+4i$
- $(3-2i)-(6+4i) = (3-6)+(-2-4)i = -3-6i$
- $3i(6+i) = 18i+3i^2 = -3+18i$
- $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
- $i^2+2i+1 = 0+2i = 2i$
- $\frac{3+i}{2-i} = \frac{(3+i)(2+i)}{4-i^2} = \frac{6+3i+2i+i^2}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$
- $(4+4i)+(-8-7i)+(5+3i) = (-4-3i)+(5+3i) = 1+0i = 1$
- $(4+3i)(4-3i) = 16-9i^2 = 16+9 = 25$
- $(3+2i)(4+5i) = 12+15i+8i+10i^2 = 2+23i$
- $i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$

• $(1+i\sqrt{3})^2 = 1+3i^2+2i\sqrt{3} = -2+2\sqrt{3}\,i$

• $\dfrac{(6-i\sqrt{2})}{(1+i\sqrt{2})} = \dfrac{(6-i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})}{1-2i^2} = \dfrac{6-6\sqrt{2}i-i\sqrt{2}+2i^2}{3} =$

$= \dfrac{4-7\sqrt{2}i}{3}$

<u>Άσκηση 5</u>: 1^o Ο z είναι πραγματικός $\Rightarrow z=a+0i=a$

"$\Rightarrow$" $\bar{z}=a-0i=a$ άρα $z=\bar{z}$

"$\Leftarrow$" Έστω $z=\bar{z}$ και $z=a+bi$

$\left.\begin{array}{l} z=\bar{z} \Rightarrow a+bi=a-bi \Rightarrow a=a \text{ και } b=-b \Rightarrow 2b=0 \\ \text{οπότε } z=a+0i, \text{ άρα } z \text{ είναι πραγματικός}, b\in\mathbb{R} \end{array}\right\} b=0$

2^o Ο z είναι φανταστικός $\Rightarrow z=0+bi$

"$\Rightarrow$" $\bar{z}=0-bi=-bi$, $z=bi$ άρα $z=-\bar{z}$

"$\Leftarrow$" Έστω $z=-\bar{z}$ και $z=a+bi$

$\left.\begin{array}{l} z=-\bar{z} \Rightarrow a+bi=-a+bi \Rightarrow b=b \text{ και } a=-a \Rightarrow 2a=0 \\ a\in\mathbb{R} \end{array}\right\} a=0$

Οπότε, $z=0+bi$, δηλαδή ο z είναι φανταστικός αριθμός

<u>Άσκηση 6</u>: Παρατηρώ ότι $z_1=\bar{z_2}$, οπότε $z_1+z_2=z_2+\bar{z_2}$

ή $z_2=\bar{z_1}$, οπότε $z_1+z_2=z_1+\bar{z_1}=a+bi+a-bi=2a\in\mathbb{R}$

έστω $z_1=\dfrac{5+9i}{7+4i}=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$

$z_1-z_2=z_1-\bar{z_1}=a+bi-a+bi=2bi$ είναι φανταστικός αριθμός.

Άσκηση 7: $x, y \in \mathbb{R}$

• $(x+y)+(x-y)i = 3-i \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{} 2x=2 \Rightarrow x=1$
όποτε $y=2$

• $(3-2i)^2 + (x-yi) = x-yi \Rightarrow$
$\Rightarrow (9-4i^2-12i)-(x+yi) = x-yi$
$\Rightarrow (5-12i)-(x+yi) = x-yi$
$\Rightarrow (5-x)+(-12-y)i = x-yi \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5-x=x \\ -12-y=-y \end{matrix}\right\} 2x=5$
$\Rightarrow x=\frac{5}{2}$

• $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+yi} = 1+i \Rightarrow \frac{(1+i^2+2i)}{(1+i^2-2i)} + \frac{x-yi}{x^2-y^2i^2} = 1+i \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-(2i)}{(2i)} + \frac{x-yi}{x^2+y^2} = 1+i \Rightarrow \frac{-x^2-y^2+x-yi}{x^2+y^2} = 1+i$

Άσκηση 8: • $\bar{z} = z^2$. Έστω $z = x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$
$\bar{z} = z^2 \Rightarrow \overline{(x+yi)} = (x+yi)^2 \Rightarrow x-yi = x^2-y^2+2xyi \Rightarrow$
$\Rightarrow x = x^2-y^2$ και $-y = 2xy \Rightarrow$
$2xy+y=0$
$y(2x+1)=0$

1η περίπτωση: $\begin{matrix} x=x^2 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x(x-1)=0 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, $y=0$

Όποτε $z=0+0i$ ή $z=1+0i$

2η περίπτωση: $x = x^2 - y^2$ / $x = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - y^2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{3}{4} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Οπότε $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ή $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Άρα η εξίσωση έχει 4 λύσεις: $\begin{cases} z=0 \\ z=1 \\ z=-1/2+\sqrt{3}/2\, i \\ z=-1/2-\sqrt{3}/2\, i \end{cases}$

• $\bar{z} = z^3 = z^2 \cdot z$ Έστω $z = x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$

$\bar{z} = z^2 \cdot z \Rightarrow \overline{(x+yi)} = (x+yi)^2 (x+yi) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-yi) = (x^2 - y^2 + 2xyi)(x+yi) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-yi) = x^3 - xy^2 + 2x^2yi + x^2yi - y^3i + 2xy^2i^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-yi) = x^3 - y^3i + 3x^2yi - 3xy^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - yi = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i \Rightarrow$

$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x \\ -y = 3x^2y - y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x^2 - 3y^2 - 1) = 0 \\ x=0 \text{ ή } x^2 - 3y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$\Delta = 12y^2 + 4$

Δυνάμεις Μιγαδικών Αριθμών

$z \in \mathbb{C}$

$z^0 = 1$

$z^1 = z$

$z^2 = z \cdot z$

$z^{n+1} = z^n \cdot z$

Παράδειγμα: Βρες το i^n

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

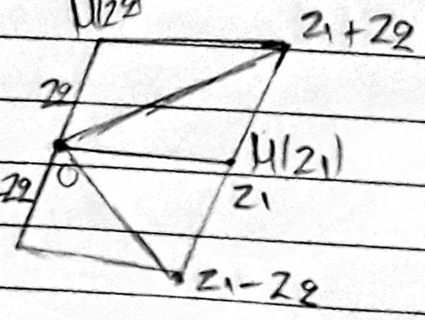
$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$

Παρατηρώ ότι όλες οι δυνάμεις του i βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς: $1, i, -1, -i$

$$i^k = \begin{cases} 1 & n = 4k+0, \quad i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1 \\ i & n = 4k+1, \quad i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = 1 \cdot i = i \\ -1 & n = 4k+2, \quad i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1 \\ -i & n = 4k+3, \quad i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = 1(-i) = -i \end{cases}$$

Ιδιότητες του μέτρου

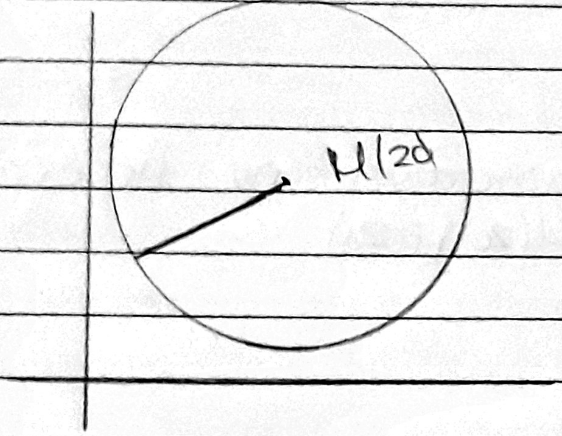
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$
- τριγωνική ανισότητα: $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$



$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

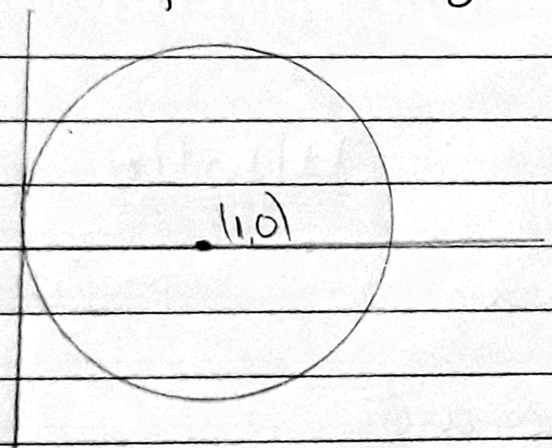
Πρόταση: Το μέτρο της διαφοράς των μιγαδικών z_1, z_2 δηλαδή το $|z_1 - z_2|$ είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων του z_1 και z_2, δηλαδή η απόσταση από το $M(z_1)$ έως το $M(z_2)$.

→ Τι παριστάνει η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, όπου $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ και $z_0 \in \mathbb{C}$?



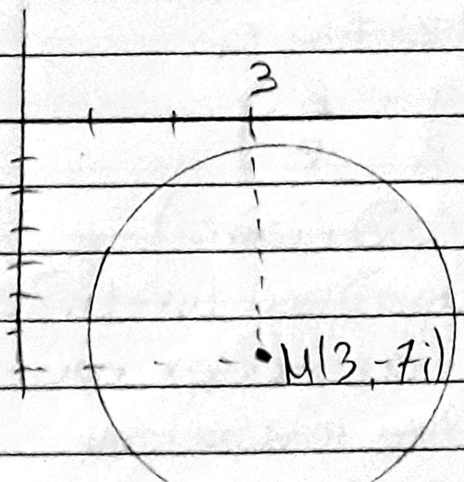
κύκλος με ακτίνα ρ και κέντρο το $M(z_0)$

→ Τι παριστάνει η εξίσωση $|z - 1| = 2$ στο μιγαδικό επίπεδο?



κύκλος με ακτίνα 2 και κέντρο το (1,0)

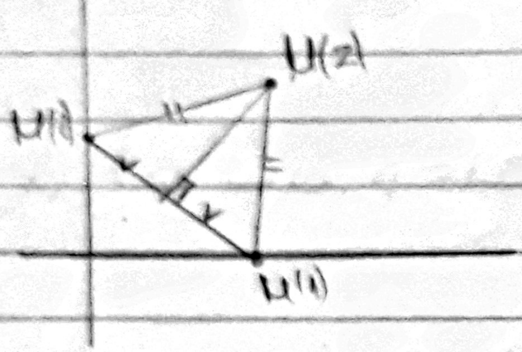
→ Τι παριστάνει η εξίσωση $|z - 3 + 7i| = \sqrt{3}$ στο μιγαδικό επίπεδο?



κύκλος με κέντρο το $M(3, -7i)$ και ακτίνα $\sqrt{3}$

* Δεν μπορώ να συγκρίνω μιγαδικούς αριθμούς. Στους μιγαδικούς δεν υπάρχει διάταξη.

→ Τι παριστάνει η εξίσωση $|z-1|=|z-i|$ στο μιγαδικό επίπεδο?



Την μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος M(1)M(i)
για τα 1 και i η μεσοκάθετος είναι η $x=y$

Η εξίσωση $|z-z_0|=|z-z_1|$ παριστάνει την μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος $M(z_0)M(z_1)$